

## **Л2. Определители. Основные свойства определителей. Методы вычисления определителей. Матрицы. Действия с матрицами. Обратные матрицы. Ранг матрицы Определение.**

**Цель лекции:** познакомить студентов с основными понятиями линейной алгебры: определителями и их свойствами, методами вычисления определителей, базовыми видами матриц и действиями над ними. Сформировать понимание понятий обратной матрицы и ранга матрицы, а также методов их нахождения.

### **Основные вопросы**

- Определители матриц 1-го, 2-го и 3-го порядков.
- Свойства определителей и методы их вычисления.
- Понятие матрицы, размерность матрицы, типы матриц (квадратные, треугольные, диагональные).
- Транспонирование матриц.
- Действия над матрицами: сложение, умножение на число, умножение матриц.
- Свойства операций над матрицами.
- Обратная матрица: определение, критерий существования, формула через присоединённую матрицу.
- Вырожденные и невырожденные матрицы.
- Ранг матрицы: определение, миноры, методы вычисления (метод окаймляющих миноров, метод Гаусса).

**Краткое содержание:** в лекции вводятся определители различных порядков, их свойства и методы вычисления, включая правило Саррюса и разложение по строкам. Рассматриваются матрицы, операции над ними, транспонирование, вычисление обратной матрицы и понятие ранга, а также методы его нахождения.

Матрицей размера  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов.

Числа, стоящие в матрице, называются ее элементами и обозначаются переменной (буквой) с двумя индексами, первый из которых равен номеру строки, а второй – номеру столбца в пересечении которых находится данный элемент. Элементы матрицы обычно обозначаются малыми буквами, а сами матрицы – соответствующими заглавными. Если матрица задается перечислением своих элементов, то таблица элементов заключается в круглые или квадратные скобки.

Например, матрица  $A$  размера  $2 \times 3$  записывается в виде:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ .

Эта матрица состоит из 6 элементов  $a_{ij}$ , где  $i = 1, 2$  – есть номер строки,  $j = 1, 2, 3$  – номер столбца.

Матрицы используются в технических науках и в экономике для записи табличной информации. В программировании матрицы называются двумерными массивами.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется квадратной, а число строк (столбцов) этой квадратной матрицы называется ее порядком. Квадратная матрица  $n$ -го порядка состоит из  $n^2$  элементов.

Каждой квадратной матрице по определенному правилу сопоставляется число, которое называется определителем этой матрицы. Определитель, в отличие от матрицы обозначается вертикальными линиями:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Сформулируем правила вычисления определителей 1-го, 2-го, 3-го порядков.

1). Определителем матрицы 1-го порядка называется элемент этой матрицы. Например, если  $A = (5)$ , то  $|A| = 5$ . 2). Определителем матрицы 2-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Например:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ .

Определителем матрицы 3-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Это правило называется правилом треугольников (Саррюса)

Например:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 9 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 0$

**Определение:** Транспонированной матрицей для матрицы  $A$  называется матрица  $A^T$ , столбцами которой являются соответствующие строки матрицы  $A$ .

Диагональ, исходящая из левого верхнего угла матрицы, называется ее главной диагональю. Транспонированная матрица  $A^T$  симметрична  $A$  относительно главной диагонали.

Рассмотрим теперь свойства определителей, справедливые для определителей любого порядка. Для определенности будем их записывать для определителей 3-го порядка.

1. Определители квадратной матрицы  $A$  и ее транспонированной  $A^T$  совпадают, т.е.  $|A| = |A^T|$ .

2. При перемене местами двух строк матрицы, ее определитель меняет свой знак на противоположный.

3<sup>0</sup>. Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен 0.

4<sup>0</sup>. Если все элементы одной строки квадратной матрицы умножить на число  $k$ , то ее определитель умножится на это число.

5<sup>0</sup>. Если квадратная матрица содержит нулевую строку, то ее определитель равен 0. Это свойство получается из предыдущего при  $k = 0$ .

6<sup>0</sup>. Если одна из строк определителя записывается в виде суммы двух строк, то определитель записывается в виде суммы двух определителей, у которых на месте этой строки стоят соответственно первые и вторые слагаемые. Остальные соответствующие строки всех трех определителей равны.

7<sup>0</sup>. Если к одной строке матрицы прибавить другую ее строку, умноженную на число  $k$ , то определитель матрицы при этом не изменится.

**Определение.** Минором элемента  $a_{ij}$  называется определитель, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

**Определение.** Алгебраическим дополнением элемента  $a_{ij}$  называется соответствующий минор, умноженный на  $(-1)^{ij}$  т.е  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , где  $i$  – номер строки и  $j$  – столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

8<sup>0</sup>. (Разложение определителя по элементам некоторой строки). Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

## Пример 2.

Найдем определитель матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ , разложив его по элементам

первой

строки.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \\ 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = -3 - 2(-6) + 3(-3) = 0.$$

Формально эта теорема и другие свойства определителей применимы пока только для определителей матриц не выше третьего порядка, поскольку другие определители мы не рассматривали. Следующее определение позволит распространить эти свойства на определители любого порядка.

**Определение.** Определителем матрицы  $A$   $n$ -го порядка называется число, вычисленное с помощью последовательного применения теоремы о разложении и других свойств определителей.

Можно проверить, что результат вычислений не зависит от того, в какой последовательности и для каких строк и столбцов применяются вышеуказанные свойства. Определитель с помощью этого определения находится однозначно.

Хотя данное определение и не содержит явной формулы для нахождения определителя, оно позволяет находить его путем сведения к определителям матриц меньшего порядка. Такие определения называют рекуррентными.

**Определение.** Квадратная матрица, у которой ниже главной диагонали стоят нулевые элементы ( $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ ) называется верхнетреугольной. Матрица, у которой выше главной диагонали стоят нулевые элементы ( $a_{ij} = 0$  при  $i < j$ ) называется нижнетреугольной.

Верхне и нижнетреугольные матрицы называются треугольными.

**Теорема.** Определитель квадратной треугольной матрицы равен произведению ее элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.  $|A| = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .

**Определение.** Квадратная матрица, у которой вне главной диагонали стоят нулевые элементы, называется диагональной.

Диагональная матрица является и верхне – и нижнетреугольной, поэтому ее определитель также равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят только единичные элементы, называется единичной матрицей. Определитель единичной матрицы равен 1, т.е.  $|E| = 1$ .

**Определение.** Произведением матрицы  $A$  размера  $m \times n$  на число  $\lambda$ , называется матрица  $B = \lambda A$  размера  $m \times n$ , каждый элемент  $b_{ij}$  которой равен  $\lambda a_{ij}$ .

**Определение.** Суммой матриц  $A$  и  $B$  одинакового размера называется матрица  $C = A + B$  того же размера, каждый элемент  $c_{ij}$  которой равен  $a_{ij} + b_{ij}$ . Матрицы разного размера складывать нельзя.

Эти операции обладают свойствами: а) коммутативности ( $A + B = B + A$ ); б) ассоциативности ( $(A + B) + C = A + (B + C)$ ); в) дистрибутивности ( $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ).

Операцию умножения матриц определим в два этапа.

**Определение.** Произведением строки  $A$  из  $n$  элементов на столбец  $B$  из  $n$  элементов называется число  $AB$ , равное сумме произведений соответствующих элементов строки и столбца.

Строчку и столбец разной длины перемножать нельзя.

**Определение.** Произведением матрицы  $A$  размера  $m \times n$  на матрицу  $B$  размера  $n \times k$  называется матрица  $C$  размера  $m \times k$ , каждый элемент  $c_{ij}$  которой равен произведению  $i$ -ой строки матрицы  $A$  на  $i$ -ый столбец матрицы  $B$ , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj}$$

**Пример 4.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Найдём матрицы  $AB$  и  $BA$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 0 + 2 \cdot 2) & (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3) \\ (3 \cdot 0 + 4 \cdot 2) & (3 \cdot 1 + 4 \cdot 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0 \cdot 1 + 1 \cdot 3) & (0 \cdot 2 + 1 \cdot 4) \\ (2 \cdot 1 + 3 \cdot 3) & (2 \cdot 2 + 3 \cdot 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что  $AB \neq BA$ , т.е. умножение матриц свойством коммутативности не обладает. Единичная матрица  $E$  играет роль единицы при умножении на квадратную матрицу, т.е. для любой квадратной матрицы  $A$  верно равенство  $AE = EA = A$ .

Произведение матриц соответствующих размеров обладает свойствами:

а) ассоциативности  $A(BC) = (AB)C$ ;

б) дистрибутивности  $A(B+C) = AB + AC$  и  $(B+C)A = BA + CA$ .

Кроме того, для квадратных матриц  $|AB| = |A| \cdot |B|$ , т.е. определитель произведения матриц равен произведению их определителей.

**Определение.** Обратной матрицей для квадратной матрицы  $A$  называется такая матрица  $A^{-1}$ , что выполняется равенство  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ .

**Определение.** Квадратная матрица  $A$ , определитель которой равен нулю, называется вырожденной, матрица, определитель которой не равен нулю, называется невырожденной.

**Пример 5.** Матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  – вырождена,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  – невырождена. Из соотношения  $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$  следует, что у вырожденной матрицы не может быть обратной ( $0 \cdot |A^{-1}| \neq 1$ ).

**Определение.** Присоединенной матрицей для квадратной матрицы  $A$  называется матрица  $\tilde{A}$ , элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы  $A$ , т.е.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Теорема об обратной матрице.** Невырожденные матрицы и только они имеют обратные матрицы, которые находятся по формуле  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^T$ . (Здесь  $\tilde{A}^T$  – присоединённая транспонированная матрица).

**Ранг матрицы.** Рассмотрим одну числовую характеристику любой (необязательно квадратной) матрицы. Ранг матрицы определяет число так называемых базисных строк или столбцов матрицы, через которые с помощью линейных операций можно получить все остальные строки или столбцы матрицы.

**Определение.** Минором  $k$ -го порядка матрицы  $A$  называется определитель, составленный из элементов стоящих на пересечении произвольно выбранных  $k$ -столбцов и  $k$ -строк этой матрицы.

**Определение.** Рангом матрицы  $A$  называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Он обозначается символом  $r(A)$  или  $\text{rang } A$ .  $r(A)$  – целое неотрицательное число, не превосходящее числа строк и столбцов матрицы  $A$ . Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Для нахождения  $r(A)$  формально необходимо рассмотреть все миноры  $A$ , начиная с 1-го порядка и проверить их на вырожденность.

Метод окаймляющих миноров позволяет сократить эту процедуру. Он состоит в следующем. Выбираем любой невырожденный минор 1-го порядка (ненулевой элемент матрицы  $A$ ). Обозначим его через  $M_1$ . Затем рассматриваем все миноры 2-го порядка, содержащие  $M_1$  (окаймляющие его). Если все они вырождены, то  $r(A) = 1$ , если нет, то невырожденный минор 2-го порядка обозначаем через  $M_2$  и так далее. Если у матрицы  $A$  есть невырожденный минор  $k$ -го порядка и все окаймляющие его миноры (если они есть) вырождены, то  $r(A) = k$ , иначе выбираем минор  $M_{k+1}$  и продолжаем этот процесс.

**Пример 6.** Найдем ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . У матрицы выбираем невырожденный минор 1-го порядка  $M_1 = (a_{11}) = 1$ . Среди окаймляющих его миноров есть один невырожденный  $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ . Единственный минор 3-го порядка окаймляющий  $M_2$  – это сама матрица  $A$ . Но, поскольку

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } A \text{ – вырождена и } r(A) = 2.$$

Рассмотрим еще один метод нахождения  $r(A)$ , который называется методом элементарных преобразований или методом Гаусса.

Элементарными преобразованиями для матрицы  $A$  называются следующие ее преобразования.

1. Перестановка строк или столбцов местами.
2. Умножение строки или столбца на ненулевой коэффициент.
3. Прибавление к одной строке или столбцу матрицы другой её строки или столбца, умноженной на некоторое число  $k$ .
4. Зачеркивание нулевой строки или столбца матрицы.

Матрица  $B$ , полученная из  $A$  с помощью элементарных преобразований, называется эквивалентной ей и обозначается в виде  $A \sim B$ .

**Теорема.** При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

**Теорема.** Ранг треугольной матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Что называется определителем матрицы 1-го, 2-го и 3-го порядков?
2. Перечислите основные свойства определителей.
3. В чем состоит правило Саррюса?
4. Что такое минор и алгебраическое дополнение?
5. Как выполняется разложение определителя по строке?
6. Дайте определение матрицы и её размера.
7. Как определяется произведение двух матриц?
8. Когда квадратная матрица называется вырожденной?
9. Как определяется обратная матрица и по какой формуле её находят?
10. Что называется рангом матрицы?
11. Как можно найти ранг методом Гаусса?
12. Каковы свойства ранга при элементарных преобразованиях?

### **Литература**

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — СПб.: Лань, 2009.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ФМЛ, 2004.
3. Индивидуальные задания по высшей математике / под ред. А.П. Рябушко. — Минск: Выш. школа, 2009.
4. Махмеджанов Н., Махмежанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике, 2009.